

ней. Теория Максвелла - Мичелла не получила практического применения при проектировании ферм главным образом из-за того, что конструкции на ее основе неудовлетворительны с точки зрения устойчивости равновесия.

1.Юрьев А.Г. Строительная механика: синтез конструкций / А.Г. Юрьев. – М.: МИСИ, 1982. – 100 с.

2.Tadjbakhsh, I. Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues / I.Tadjbakhsh, J.B.Keller // J. Appl. Mech. – 1962. – V.29. – P.159-164.

3.Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций: вопросы вибрации и потери устойчивости / Н. Ольхофф; пер. с англ. А.М. Самсонова; под ред. К.А.Лурье и А.В. Черкаева. – М.: Мир, 1981. – 277 с.

4.Юрьев А.Г. Оптимальное проектирование фермы с учетом безопасной устойчивости / А.Г.Юрьев // Предотвращение аварий зданий и сооружений: Сб. науч. тр. НИИ «Промбезопасность». – М.: НИИ «Промбезопасность», 2008. – С.305-310.

Получено 27.04.2012

УДК 624.74 : 539.3

В.П.АГАПОВ, д-р техн. наук

МГАКХиС, г.Москва (Российская Федерация)

А.В.ВАСИЛЬЕВ

ООО НСП «Надежность», г.Москва (Российская Федерация)

## О МОДЕЛИРОВАНИИ КОЛОНН СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ОБЪЕМНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Предлагается новый подход к моделированию колонн прямоугольного поперечного сечения при расчете строительных конструкций методом конечных элементов. При этом каждая колонна представляется совокупностью объемных конечных элементов в виде шестигранников с произвольной разбивкой по сечению и высоте. Промежуточные узлы сетки конечных элементов колонны исключаются на стадии формирования ее матричных характеристик. В результате этого при незначительном увеличении числа степеней свободы конструкции удастся избавиться от недостатков, присущих традиционному способу моделирования колонн одномерными элементами.

Пропонується новий підхід до моделювання колон прямокутного поперечного перерізу при розрахунку будівельних конструкцій методом кінцевих елементів. При цьому кожна колона представляється сукупністю об'ємних кінцевих елементів у вигляді шестигранників з довільною розбивкою по перетину і висоті. Проміжні вузли сітки кінцевих елементів колони виключаються на стадії формування її матричних характеристик. В результаті цього при незначному збільшенні числа ступенів свободи конструкції вдається позбутися від недоліків, властивих традиційному способу моделювання колон однимірними елементами.

The new approach to rectangular column modeling in finite element analysis of building structures is suggested. Each column is presented by the set of the volume 8-node elements with arbitrary discretization on the cross section and on the height of the column. The inner nodes of the finite element mesh are excluded sequentially layer by layer, thus reducing the stiffness matrix and other characteristics of the column to its top and bottom cross sections.

**Ключевые слова:** строительные конструкции, колонны прямоугольного сечения, метод конечных элементов, суперэлементы.

В подавляющем большинстве программ для расчета строительных конструкций методом конечных элементов на ЭВМ стержни моделируются одномерными элементами, матрица жесткости которых строится на основе гипотезы плоских сечений, а концевые усилия приводятся к центрам тяжести поперечных сечений [1-3]. Такой подход позволяет создать эффективные алгоритмы, но он не лишен недостатков. Основными из них являются следующие: 1) некорректная (в точке) передача усилий со стержней на плиты, оболочки и массивные элементы конструкций; 2) проблематичность учета деформации сечений для стержней некруглого сечения; 3) сложность учета физической и геометрической нелинейности.

Предлагается способ построения конечного элемента колонны прямоугольного сечения, позволяющий избежать указанных недостатков.

Колонна моделируется объемными элементами, как показано на рис.1.

Число разбиений по высоте колонны и по сечению может быть произвольным.

Разделим колонну по высоте на слои (рис.2). Границы между слоями пронумеруем от 1 до  $(n + 1)$ , где  $n$  – число разбиений по высоте.

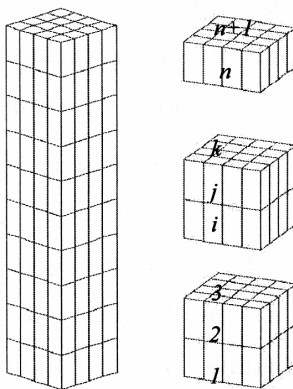


Рис.1

Рис.2

Для каждого слоя стандартным образом можно сформировать матрицу жесткости и вектор нагрузки такие, что

$$\{f\} = [k]\{\delta\} + \{\bar{f}\}, \quad (1)$$

где  $\{f\}$  – вектор узловых сил;  $\{\delta\}$  – вектор узловых перемещений;  $[k]$  – матрица жесткости слоя;  $\{\bar{f}\}$  – вектор узловых сил от пролетной нагрузки (на рис.1, 2 пролетная нагрузка не показана).

Для двух соседних слоев  $(i - j)$  и  $(j - k)$  имеем:

$$\begin{Bmatrix} f_i^{(1)} \\ f_j^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1}^{(1)} & k_{1,2}^{(1)} \\ k_{2,1}^{(1)} & k_{2,2}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_i^{(1)} \\ \bar{f}_j^{(1)} \end{Bmatrix}; \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} f_j^{(2)} \\ f_k^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1}^{(2)} & k_{1,2}^{(2)} \\ k_{2,1}^{(2)} & k_{2,2}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_j^{(1)} \\ \bar{f}_k^{(1)} \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Из формул (2) и (3) находим

$$\{f_i^{(1)}\} = [k_{1,1}^{(1)}]\{\delta_i\} + [k_{1,2}^{(1)}]\{\delta_j\} + \{\bar{f}_i^{(1)}\}; \quad (4)$$

$$\{f_j^{(1)}\} = [k_{2,1}^{(1)}]\{\delta_i\} + [k_{2,2}^{(1)}]\{\delta_j\} + \{\bar{f}_j^{(1)}\}; \quad (5)$$

$$\{f_j^{(2)}\} = [k_{1,1}^{(2)}]\{\delta_j\} + [k_{1,2}^{(2)}]\{\delta_k\} + \{\bar{f}_j^{(2)}\}; \quad (6)$$

$$\{f_k^{(2)}\} = [k_{2,1}^{(2)}]\{\delta_j\} + [k_{2,2}^{(2)}]\{\delta_k\} + \{\bar{f}_k^{(2)}\}. \quad (7)$$

Суммируя (5) и (6), находим вектор узловых сил в сечении  $j$ :

$$\begin{aligned} \{f_j\} &= \{f_j^{(1)}\} + \{f_j^{(2)}\} = [k_{2,1}^{(1)}]\{\delta_i\} + [k_{2,2}^{(1)} + k_{1,1}^{(2)}]\{\delta_j\} + \\ &+ [k_{1,2}^{(2)}]\{\delta_k\} + \{\bar{f}_j^{(1)}\} + \{\bar{f}_j^{(2)}\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из условия равновесия узла  $j$

$$\{f_j\} = \{f_j^{(1)}\} + \{f_j^{(2)}\} = 0. \quad (9)$$

Обозначая

$$[k_{j,j}] = [k_{2,2}^{(1)} + k_{1,1}^{(2)}] \quad (10)$$

и используя условие (9), из формулы (8) выражаем подвектор  $\{\delta_j\}$ :

$$\{\delta_j\} = [k_{j,j}]^{-1} ([k_{2,1}^{(1)}]\{\delta_i\} + [k_{1,2}^{(2)}]\{\delta_k\}) + [k_{j,j}]^{-1} (\{\bar{f}_j^{(1)}\} + \{\bar{f}_j^{(2)}\}). \quad (11)$$

Подставляя формулу (11) в формулы (2) и (3) и выражая из первой строки формулы (2) вектор  $\{f_i^{(1)}\}$ , а из второй строки формулы (3) вектор  $\{f_k^{(2)}\}$ , получаем

$$\begin{Bmatrix} f_i^{(1)} \\ f_k^{(2)} \end{Bmatrix} = [k_{i,k}] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{f}_k \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

где

$$[k_{i,k}] = \begin{bmatrix} k_{1,1}^{(1)} - k_{1,2}^{(1)} k_{j,j}^{-1} k_{2,1}^{(1)} & -k_{1,2}^{(1)} k_{j,j}^{-1} k_{1,2}^{(2)} \\ -k_{2,1}^{(2)} k_{j,j}^{-1} k_{2,1}^{(1)} & k_{2,2}^{(2)} - k_{2,1}^{(2)} k_{j,j}^{-1} k_{1,2}^{(2)} \end{bmatrix} - \quad (13)$$

матрица жесткости слоя  $(i - k)$ ;

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_i \\ \bar{f}_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_i^{(1)} - k_{1,2}^{(1)} k_{j,j}^{-1} \{ \bar{f}_j^{(1)} + \bar{f}_j^{(2)} \} \\ \bar{f}_k^{(2)} - k_{2,1}^{(2)} k_{j,j}^{-1} \{ \bar{f}_j^{(1)} + \bar{f}_j^{(2)} \} \end{Bmatrix} - \quad (14)$$

вектор пролетной нагрузки на участке  $(i - k)$ , приведенный к узлам  $i$  и  $k$ .

Применяя описанные выше операции к каждой паре соседних слоев, начиная с нижних, и исключая последовательно узлы на границе слоев, на последнем этапе получим матрицу жесткости и вектор нагрузок, приведенные к началу и концу конечного элемента (к узлам нижнего и верхнего сечений колонны).

Описанный выше конечный элемент реализован в вычислительном комплексе ПРИНС [4]. Для проверки работоспособности разработанного элемента решен ряд тестовых задач. Ниже приводятся результаты расчета отдельно стоящей колонны квадратного сечения на сжатие, изгиб и кручение. Рассчитывалась колонна с размерами  $0,4 \times 0,4 \times 4$  м, выполненная из бетона с модулем упругости  $E = 3 \times 10^7$  КПа и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,2$ .

Нижний конец колонны заземлялся, верхний конец оставался свободным. При расчете на сжатие к верхнему торцу прикладывалась равномерно распределенная нагрузка интенсивностью 250 КПа. При расчете на кручение и изгиб нагрузка прикладывалась в угловых точках на свободном конце в виде четырех сосредоточенных сил, равных 10 КН каждая. При этом продольная сила равнялась 40 КН, крутящий момент равнялся 8 КН×м и наибольший изгибающий момент – 160 КН×м.

Рассматривались два варианта расчетной схемы. В первом варианте стороны сечения разбивались на четыре участка (рис.3, а), во втором – на пять (рис.3, б). По высоте колонна разбивалась на 10 частей в обоих вариантах.

Результаты расчета для первого варианта приведены на рис.2÷4 в графическом виде и для обоих вариантов – в таблице в числовом виде. На рис.4, а показаны перемещения колонны, а на рис.4, б – нормальные напряжения при сжатии. На рис.5, а и 5, б те же величины показаны при изгибе. На рис.6, а приведены перемещения, а на рис.6, б – касательные напряжения при кручении. Теоретические значения, приведенные в таблице, подсчитывались по формулам сопротивления материалов.

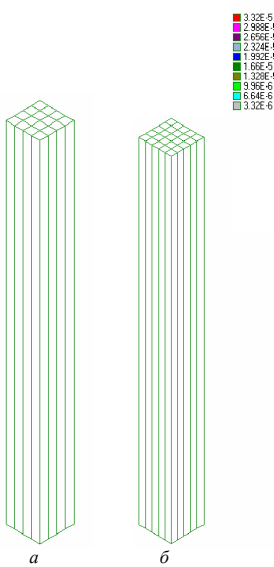


Рис.3

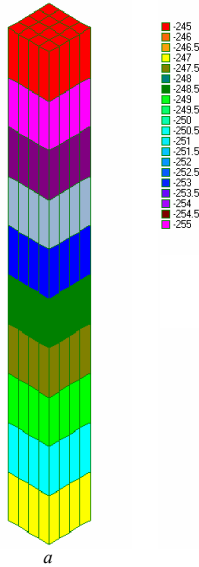


Рис.4

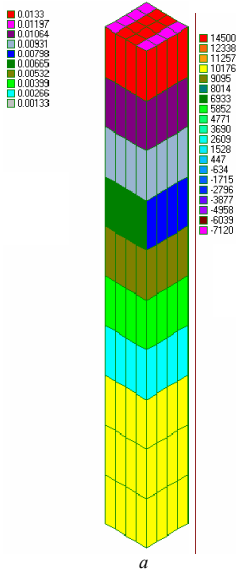


Рис.5

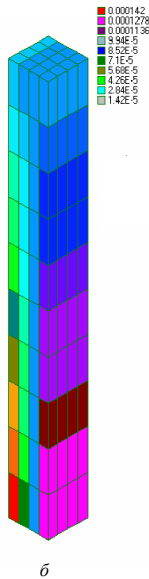


Рис.6

	Сжатие		Изгиб			Кручение	
	$\Delta l \times 10^5$ (м)	$\sigma_{\max}$ (КПа)	$w_{\max}$ (см)	$\sigma_{\max}$ (КПа)	$\tau_{\max}$ (КПа)	$\varphi \times 10^4$ (рад)	$\tau_{\max}$ (КПа)
Теория	3,33	250	1,33	15000	375	7,09	601,5
МКЭ, вар. 1	3,32	250,5	1,33	14500	363	6,82	593
Расхождение	0,3%	0,2%	0%	3,33%	3,2%	3,81%	1,4%
МКЭ, вар.2	3,32	250,15	1,33	14500	365	6,98	593
Расхождение	0,3%	0,06%	0%	3,33	2,67%	1,57%	1,4%

Сопоставительный анализ результатов, приведенных выше, показывает незначительное расхождение результатов, полученных по теории сопротивления материалов, с одной стороны, и расчетом по программе ПРИНС с помощью предложенного конечного элемента – с другой. Учитывая, что предложенный конечный элемент полностью снимает проблемы, связанные с использованием одномерных моделей стержневых элементов, авторы рекомендуют использовать предложенный конечный элемент при расчете строительных конструкций, содержащих колонны прямоугольного сечения.

1. Басов К.А. ANSYS. Справочник пользователя. – М.: ДМК ПРЕСС, 2005. – 640 с.
2. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Sixth edition. – McGraw-Hill, 2005. – 631 p.
3. Bathe K.J. Finite Element Procedures. – Prentice Hall, Inc., 1996. – 1037 p.
4. Агапов В.П. Исследование прочности пространственных конструкций в линейной и нелинейной постановках с использованием вычислительного комплекса «ПРИНС» // Пространственные конструкции зданий и сооружений (исследование, расчет, проектирование, применение): Сб. статей. Вып.11. – М., 2008. – С.57-67.

Получено 27.04.2012

УДК [624.012.45+624.014.2] : 691.792

Л.І.СТОРОЖЕНКО, д-р техн. наук, О.Г.ГОРБ

Полтавський національний технічний університет ім. Юрія Кондратюка

## **РОЗРАХУНОК СТИСНУТИХ СТАЛЕЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ІЗ КЛЕЙОВИМ З'ЄДНАННЯМ БЕТОНУ І СТАЛІ**

Наведено методики розрахунку несучої здатності сталезалізобетонних елементів, у яких сумісна робота сталі та бетону забезпечується за допомогою склеювання. Виконано порівняння результатів експериментальних досліджень з теоретичними розрахунками.

Приведены методики расчета несущей способности сталежелезобетонных элементов, в которых совместная работа стали и бетона обеспечивается посредством склеивания. Выполнено сравнение результатов экспериментальных исследований с теоретическими расчетами.